Buurwisselgrafen

Bacheloreindproject Technische Wiskunde

Gijs Bellaard (1010490)

Technische Universiteit Eindhoven

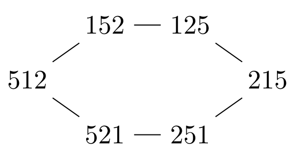
Juni 2019

Muntjes

Stel je voor, je haalt wat muntgeld uit je portemonnee en legt het op een rijtje. Laten we zeggen dat je een muntje van 1c, 2c en 5c hebt gepakt en ze in de volgorde 125 hebt gelegd. Het doel is om elke volgorde van de muntjes precies één keer langs te laten komen door steeds alleen naburige muntjes te verwisselen, ofwel door enkel zogenaamde buurwisselingen toe te passen. Een voorbeeld van zo'n buurwisseling zou dus zijn om de muntjes van 1c en 2c te verwisselen in onze volgorde om de volgorde 215 te verkrijgen. Als we dit doorzetten kunnen we inderdaad elke volgorde van deze drie muntjes precies één keer langsgaan. Maar is dit nog steeds mogelijk als we een extra muntje toevoegen? En wat gebeurt er als sommige muntstukken meerdere malen voorkomen?

Buurwisselgrafen

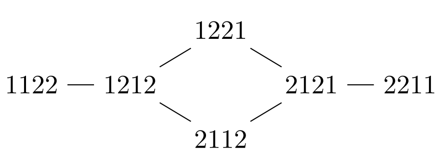
Een handige manier om dit probleem te visualiseren is door middel van grafen. Een graaf is niks anders dan een verzameling punten en verbindingen. De beste manier om het uit te leggen is om de graaf te maken die bij de 1c, 2c en 5c situatie hoort:



De lijntjes in de graaf stellen de buurwisselingen voor en de punten de volgordes. Zulke grafen noemen we buurwisselgrafen. Ons doel is nu te herformuleren als het zoeken van een wandeling in de buurwisselgraaf die elk punt precies één keer bezoekt. We zullen vanaf nu zo'n wandeling een perfecte wandeling noemen.

Onmogelijkheid

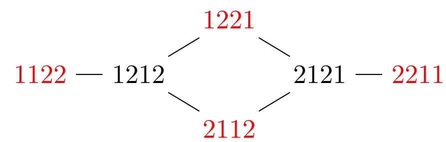
Zoals we zagen is een perfecte wandeling in het vorige voorbeeld mogelijk. Maar wat als we nu twee munten van 1c hebben en twee van 2c? Laten we de bijbehorende buurwisselgraaf bekijken:



Helaas. Met welke volgorde we ook beginnen en welke wandeling we ook maken: het lijkt erop dat een perfecte wandeling in deze situatie onmogelijk is. Dit leidt gelijk tot de vraag: wat bepaalt het wel of niet bestaan van een perfecte wandeling?

Overschot

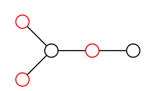
Buurwisselgrafen hebben een speciale eigenschap: je kan elk punt rood of zwart verven precies zo dat elke verbinding tussen rood en zwart ligt. Als we dit doen bij de vorige buurwisselgraaf krijgen we:



Merk op dat het verschil tussen de hoeveelheid rode en zwarte punten in deze graaf 2 is, dit noemen we het overschot. Een willekeurige wandeling door zo'n geverfde buurwisselgraaf gaat altijd van rood naar zwart en omgekeerd. Hierdoor heeft een wandeling altijd een overschot dat ≤ 1 is. Dit betekent dat als er een perfecte wandeling bestaat in een buurwisselgraaf zijn overschot ook wel ≤ 1 moet zijn. We kunnen concluderen dat elke buurwisselgraaf waarvan het overschot > 1 is geen perfecte wandeling heeft, want anders was het overschot ≤ 1!

Vermoeden

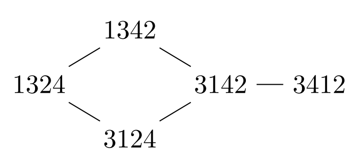
Na gezien te hebben dat perfecte wandelingen onmogelijk zijn wanneer het overschot > 1 is, krijg je misschien het vermoeden dat een overschot van ≤ 1 impliceert dat een perfecte wandeling mogelijk is. Echter, bij grafen in het algemeen is dit niet zo waardoor dit vermoeden niet vanzelfsprekend waar is. Zo heeft de volgende graaf (die geen buurwisselgraaf is) een overschot van ≤ 1, maar geen perfecte wandeling:



Het verrassende feit is dat het vermoeden wel blijkt te kloppen bij de buurwisselgrafen die we tot nu toe hebben besproken! Wacht... bestaan er meer?

Generalisatie

We kunnen nog veel meer buurwisselgrafen maken door *allemaal verschillende* munten te pakken en beperkingen te leggen op de rijtjes zoals "x moet links van de y". De buurwisselgraaf behorend bij 1 links van de 2, 3 links van de 4, en 3 links van de 2 is bijvoorbeeld:



En nog verrassender is dat het vermoeden nog steeds lijkt te kloppen bij deze buurwisselgrafen maar niemand heeft dit tot nu toe kunnen bewijzen!

Bacheloreindproject

Mijn bacheloreindproject geeft nieuwe inzichten in het berekenen van het overschot, het construeren van perfecte wandelingen en de eigenschappen van buurwisselgrafen. Ook is het verslag een verzameling van alles wat over deze buurwisselgrafen al bekend is.